Kembali

Risalah Lokakarya Komputasi dalam Sains dan Teknologi Nuklir XVII, Agustus 2006 (465-473)

GEOMETRI EUKLID VERSUS GEOMETRI SFERIK

Sangadji*

ABSTRAK

GEOMETRI EUKLID VERSUS GEOMETRI SFERIK. Pada makalah ini akan dibahas hubungan antara formula Pythagoras dan formula sinus dari segitiga pada geometri Euklid (datar) dan formula-formula yang sesuai pada geometri sferik, khususnya bagaimana mendapatkan formula-formula tersebut pada geometri Euklid dari formula-formula yang sesuai pada geometri sferik dengan metode pendekatan.

Kata-kata kunci: **G**eometri Euklid, Geometri Sferik, Pendekatan Geometri Sferik ke Geometri Euklid.

ABSTRACT

EUCLIDEAN GEOMETRY VERSUS SPHERICAL GEOMETRY .The paper discusses the relation of Pythagorean formula and sine formulas of triangles in Euclidean geometry and their counterparts in spherical geometry. Especially how we derive them from spherical version to their counterparts in Euclidean version.

Keywords: Euclidean Geometry, Spherical Geometry, Approximation of Spherical Geometry to Euclidean Geometry.

PENDAHULUAN

Geometri Euklid adalah studi geometri yang berdasarkan asumsi-asumsi dari Euclid, matematikawan Yunani Euclid. Euclid mengusulkan sejumlah aksioma yang akhirnya menjadi geometri. Ini adalah geometri yang diajarkan di sekolah-sekolah dan akhirnya menjadi geometri di mana kita hidup di bersamanya.

Geometri sferik adalah geometri pada luasan bola. Aplikasinya antara lain pada navigasi, geodesi dan bidang-bidang lain yang objek-objeknya pada luasan bola. Kulit bumi sebenarnya bukan berbentuk luasan bola, tetapi merupakan elipsoida. Karena eksentrisitasnya kecil sekitar 0,017, kulit bumi dapat dianggap sebagai luasan bola dengan jari-jari sekitar 6350 km. Lingkaran besar pada permukaan bumi adalah lingkaran khayal pada bola bumi yang berjari-jari sama

---

* Pusat Pengembangan Informatika Nuklir-BATAN

dengan jari-jari bumi dan pusatnya berimpit dengan pusat bumi. Formula-formula pada geometri Euklid (datar) pada umumnya tidak berlaku pada geometri sferik. Ternyata, geometri sferik juga mempunyai formula-formula tersebut dengan versi sferik. Bila konfigurasinya cukup kecil, dengan menerapkan pendekatan dari fungsinya yang terkait, formula pada geometri sferik dapat menjadi formula pada geometri Euklid. Sebagai contoh misalnya formula (teorema) Pythagoras dan formula sinus dari segitiga.

Pembahasan tersebut penting, mengingat: (i) pada penerapannya, yang banyak digunakan adalah (teorema) Pythagoras dan formula sinus dari segitiga dan (ii) untuk dapat memanfaatkannya secara maksimal.

Susunan makalah ini adalah Pendahuluan, Geometri Sferik, Pendekatan Geometri Sferik ke Geometri Euklid, dan kemudian diakhiri dengan Kesimpulan.

GEOMETRI SFERIK

Yang dimaksud dengan <u>luna</u> adalah bagian dari luasan bola antara dua <u>setengah lingkaran besar</u> yang membentuk sudut tertentu satu sama lain. Jadi luas dari luna dengan sudut θ dan jari-jari $\int$ adalah

$$L = \frac{\theta}{2\pi} 4\pi \int^2 = 2\theta \int^2 .$$

Bukti

Mengingat bahwa luas luasan bola dengan jari-jari $\int$ adalah $4\pi \int^2$ dan perbandingan luas luna tersebut dengan luas luasan bola dengan jari-jari $\int$ adalah $\frac{\theta}{2\pi}$, maka luas dari luna dengan sudut θ dan jari-jari $\int$ adalah

$$L = \frac{\theta}{2\pi} 4\pi \int^2 = 2\theta \int^2 .$$

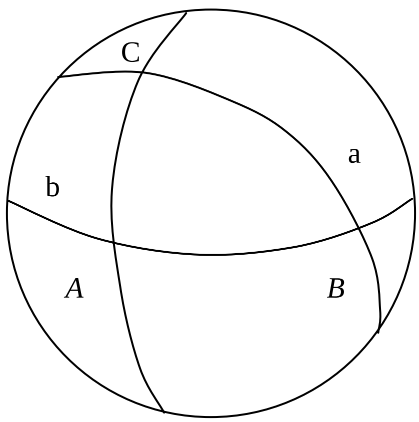
Di bawah ini diberikan teorema yang menyatakan luas segitiga sferik. Ternyata luas segitiga itu dapat dinyatakan dengan jari-jari luasan bola dan sudut-sudut segitiga sferik tersebut.

Teorema (Formula Luas Segitiga Sferik)

Misalkan ΔABC adalah segitiga pada luasan bola dengan jari-jari $\int$. Dalam hal ini ketiga sisi ΔABC terletak pada lingkaran-lingkaran besar dengan jari-jari $\int$. Maka luas ΔABC adalah

$$|\Delta ABC| = \int^2 (A + B + C - \pi),$$

di mana *A*, *B*, *C* dalam radial, dan a, b, c, berturut-turut adalah panjang sisi-sisi ΔABC di muka sudut-sudut *A*, *B*, *C*.



Gambar 1. ΔABC sferik dengan tiga luna yang sudut-sudutnya *A*,*B*,*C*.

Bukti

Bukti teorema di atas tidak sulit, yaitu berdasarkan pada hubungan antara luas dari luasan bolanya dengan luas dari tiga luna yang bersesuaian dengan sudut-sudut *A*, *B*, *C* serta ketiga luna antipodalnya. Dalam hal ini ketiga sisi ΔABC terletak pada lingkaran-lingkaran besar dengan jari-jari $\int$. Lihat Gambar 1. Tiga luna yang bersesuaian dengan sudut-sudut *A*, *B*, *C* serta ketiga luna antipodalnya, luas mereka akan menutupi luasan bola satu kali serta luas ΔABC dan antipodalnya masing-masing dua kali. Sehingga diperoleh

$$2(2\int^2)(A + B + C) = 4\pi\int^2 + 4|\Delta ABC|$$

yang memberikan

$$|\Delta ABC| = \int^2 (A + B + C - \pi). \qquad \square$$

Teorema (Teorema Pythagoras Sferik)

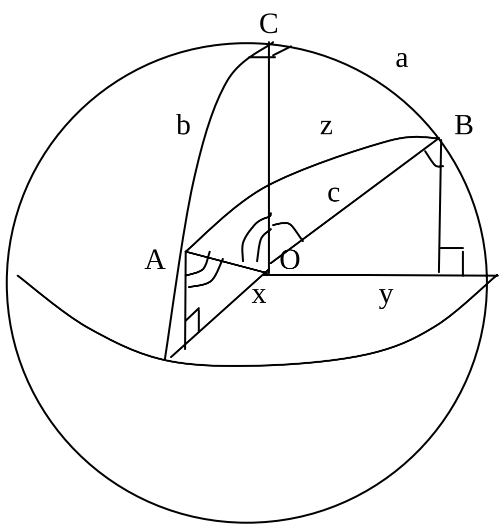
Misalkan ΔABC adalah segitiga siku-siku sferik pada bola satuan dengan sudut siku-siku di *C*. Misalkan *a*, *b*, *c* berturut-turut panjang dari sisi-sisi di muka sudut-sudut *A*, *B*, *C*. Maka berlaku

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Bukti

Bukti di bawah ini berdasar pada Daftar Pustaka 1.

Misalkan luasan bola satuan tersebut adalah *S* yang pusatnya $O(0,0,0)$ dan jari-jarinya 1. Misalkan titik *A* terletak pada bidang *xOz*, titik *B* pada bidang *yOz*, dan titik *C* pada sumbu *z* dengan koordinat $C(0,0,1)$. Dibuat vektor-vektor posisi $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yang berturut-turut ujungnya *A* dan *B*.



Gambar 2. ΔABC sferik dengan sudut siku-siku di *C*.

Lihat Gambar 2 di atas. Maka akan diperoleh

$$\vec{A} = (\sin b,\ 0,\ \cos b),\ \vec{B} = (0,\ \sin a,\ \cos a).$$

Mengingat c adalah sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$, didapat

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \| \vec{A} \| \| \vec{B} \| \cos c = 1 \cdot 1 \cdot \cos c = \cos c$$

dan juga

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sin b \cdot 0 + 0 \cdot \sin a + \cos b \cos a = \cos a \cos b.$$

Menggunakan dua hasil terakhir dapat disimpulkan $\cos c = \cos a \cos b.$ □

Teorema (Formula Sinus Sferik)

Misalkan ΔABC adalah segitiga pada luasan bola satuan dengan sisi-sisi *a*, *b*, *c* berturut-turut di muka sudut-sudut *A*, *B*, *C*. Maka berlaku

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Bukti

Bukti teorema ini berdasar pada Daftar Pustaka 1 dan mirip dengan bukti teorema sinus pada geometri Euklid. Tentukan titik *D* pada *AB* sedemikian sehingga *CD* tegak lurus *AB*. Misalkan $|CD| = h.$ Lihat Gambar 3 di bawah. Maka dapat diperoleh

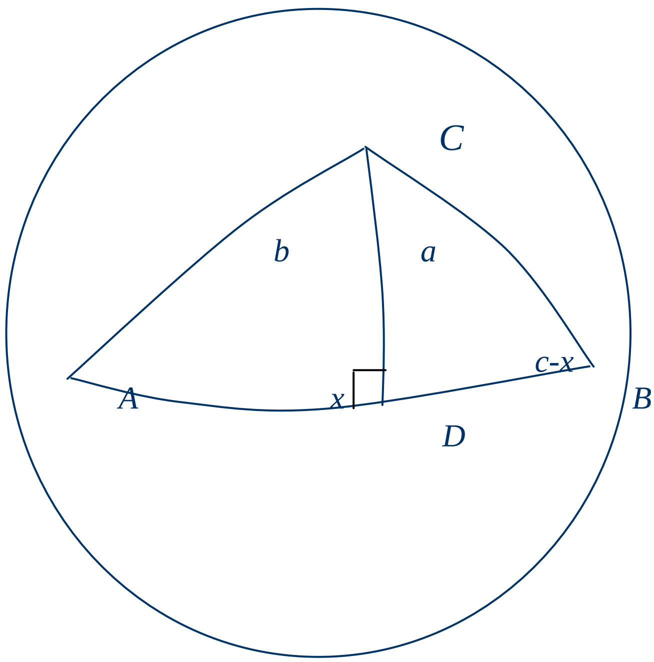
$$\sin A = \frac{\sin h}{\sin b}, \quad \sin B = \frac{\sin h}{\sin a}.$$

Jadi dengan dua persamaan tersebut didapatkan

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a, \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Dengan menarik garis tinggi dari titik *B*, menggunakan cara yang sama akan didapatkan

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}. \qquad \square$$



Gambar 3. ΔABC sferik dengan garis tinggi *CD*

PENDEKATAN GEOMETRI SFERIK KE GEOMETRI EUKLID

Teorema (Teorema Pythagoras Sferik)

Misalkan ΔABC adalah segitiga siku-siku sferik pada bola satuan dengan sudut siku-siku di *C*. Misalkan *a*, *b*, *c* berturut-turut panjang dari sisi-sisi di muka sudut-sudut *A*, *B*, *C*. Maka berlaku

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Deret Taylor untuk $\cos x$ adalah

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

persamaan $\cos c = \cos a \cos b$ menjadi

$$1 - \frac{c^2}{2} + (suku - suku\ berderajat\ lebih\ tinggi)$$
$$= 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + (suku - suku\ berderajat\ lebih\ tinggi).$$

Untuk nilai-nilai *a, b, c* yang sangat kecil, suku-suku yang berderajat lebih tinggi dapat diabaikan, sehingga diperoleh formula Pythagoras pada geometri Euklid, yaitu

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Jadi formula Pythagoras pada geometri Euklid, yaitu $c^2 = a^2 + b^2$. hanya berlaku pada geometri sferik untuk nilai-nilai *a, b, c* sangat kecil.

Teorema (Formula Sinus Sferik)

Misalkan ΔABC adalah segitiga pada luasan bola satuan dengan sisi-sisi *a, b, c* berturut-turut di muka sudut-sudut *A, B, C.* Maka berlaku

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Bila *a, b, c* cukup kecil, maka menggunakan formula $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$ diperoleh

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan di muka dapat diberikan beberapa simpulan yang penting, khususnya mengenai hubungan geometri segitiga sferik dengan geometri Euklid (datar):

1. Formula-formula pada geometri Euklid pada umumnya tidak berlaku pada geometri sferik; geometri sferik juga mempunyai formula-formula tersebut dengan versi sferik.
2. Bila konfigurasinya cukup kecil, dengan menerapkan pendekatan yang diperlukan, formula-formula pada geometri sferik menjadi formula-formula pada geometri Euklid.
3. Bila kita mempunyai masalah geometri pada bidang datar, maka digunakan formula-formula dari geometri Euklid dan bukan dari geometri sferik. Sedangkan untuk masalah geometri pada pada luasan bola, maka digunakan formula-formula dari geometri sferik dan bukan dari geometri Euklid.

DAFTAR PUSTAKA

1. BARAGAR, ARTHUR. *A Survey of Classical and Modern Geometries*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, USA. 2001.

2. KINDLE, JOSEPH H. *Plane and Solid Analytic Geometry*. McGraw-Hill Book Company, New York, USA.

3. PURCELL, J. EDWIN DAN DALE VARBERG. *Calculus with Analytic Geometry*, 5th Edition. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, USA. 1987.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

1. Nama : Sangadji
2. Tempat/Tanggal Lahir : Solo, 16 Juni 1948
3. Instansi : PPIN-BATAN
4. Pekerjaan / Jabatan : Peneliti
5. Riwayat Pendidikan :
    - S1 Matematika FMIPA UGM, 1974
    - S2 Matematika University of Arizona,USA, 1988
    - S3 Matematika University of Montana,USA, 1997
6. Pengalaman Kerja :
    - 1974-Sekarang,BATAN
    - 1998-Sekarang, UBINUS
7. Organisasi Professional :
    - Himpunan Matematika Indonesia
8. Publikasi (Makalah):

   Beberapa makalah di bidang matematika diterbitkan di
    - Prosiding LKSTN BATAN
    - Prosiding Himpunan Matematika Indonesia
    - Jurnal SIGMA(USD, Yogyakarta)
    - Jurnal Mat Stat(UBINUS)