FUNGSI-FUNGSI PADA TEORI BILANGAN DAN APLIKASINYA PADA PERHITUNGAN KALENDER

Sangadji*

ABSTRAK

FUNGSI-FUNGSI PADA TEORI BILANGAN DAN APLIKASINYA PADA PERHITUNGAN KALENDER. Dalam makalah ini dibahas fungsi-fungsi pada teori bilangan, yaitu fungsi-fungsi t, s dan bilangan bulat terbesar [ ]. Untuk setiap bilangan bulat positif *n*, $t(n)$ menyatakan banyaknya semua pembagi positif dari *n*, $s(n)$ menyatakan jumlah dari semua pembagi positif dari *n*, sedangkan untuk setiap bilangan real *x*, [*x*] menyatakan integer terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*. Sebagai aplikasinya, bila diberikan suatu tanggal dengan bulan dan tahunnya, dapat ditentukan pada hari apa jatuhnya tanggal tersebut.

Kata- kunci: Fungsi-fungsi t, s and [ ], perhitungan kalender.

ABSTRACT

NUMBER-THEORITIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS TO THE CALENDAR. This paper discusses number-theoritic functions, i.e. the functions t, s and the greatest integer function [ ]. For any positive integer *n*, $t(n)$ denotes the number of all positive divisors of *n*, $s(n)$ denotes the sum of all positive divisors of *n*, whereas for any real number *x* , [*x*] denotes the greatest integer less than or equal to *x*. For application, for instance, if we are given a date then its weekday can be determined.

Keywords: Functions t, s and [ ], calendar calculation.

PENDAHULUAN

Sebelum kita membahas tentang fungsi-fungsi pada teori bilangan, sebaiknya kita bicarakan beberapa definisi dan terminologi yang diperlukan serta beberapa teorema dan sifat-sifat yang penting dalam teori bilangan.

* Pusat Pengembangan Teknologi Informasi dan Komputasi BATAN

Definisi

Bilangan bulat positif *p* yang lebih besar dari 1 disebut *bilangan prima* bila pembagi positif dari *p* (bilangan bulat) hanyalah 1 dan *p*. Bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 yang bukan prima disebut *bilangan komposit*.

Sesuai dengan namanya, bilangan-bilangan prima berperan sangat penting dan fundamental dalam Teori Bilangan. Teorema Fundamental Aritmetika yang akan dibahas dapat dijadikan dasar peranan dari bilangan prima yang penting dan fundamental tersebut. Dari definisi tersebut jelas bahwa 1 bukan bilangan prima meskipun pembagi positif dari 1 hanyalah dia sendiri. Juga jelas bahwa satu-satunya bilangan prima yang genap adalah bilangan 2.

Definisi

Bilangan bulat *b* dikatakan habis dibagi oleh bilangan bulat a 0, ditulis dengan notasi $a \mid b$, bila terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = a\,c$.

Di bawah ini diberikan beberapa sifat tentang divisibilitas dari bilangan-bilangan bulat. Bukti dari sifat-sifat tersebut tidaklah sulit dan dapat dibaca di buku teks standar tentang teori bilangan.

Sifat-sifat

Untuk bilangan-bilangan bulat p, q, r, s berlaku:

(a) $p \mid 0$, $1 \mid p$, $p \mid p$.
(b) $p \mid 1$ bila dan hanya bila $p = \pm 1$.
(c) Bila $p \mid q$ dan $r \mid s$ maka $pr \mid qs$.
(d) Bila $p \mid q$ dan $q \mid r$ maka $p \mid r$.
(e) $p \mid q$ dan $q \mid p$ bila dan hanya bila $p = \pm q$.
(f) Bila $p \mid q$ dan $q \neq 0$ maka $|p| \leq |q|$.
(g) Bila $p \mid q$ dan $p \mid r$, maka $p \mid (qx + ry)$ untuk sebarang bilangan-bilangan bulat x dan y.

Teorema tentang algoritma pembagian di bawah ini merupakan fondasi untuk pengembangan dari teori bilangan. Bukti dari teorema tersebut tidaklah mudah. Bagi pembaca yang berminat untuk mengetahui buktinya dipersilakan membaca buku teks standar tentang teori bilangan.

Teorema (Algoritma Pembagian)

Diberikan bilangan-bilangan bulat a dan b dengan $b > 0$. Maka terdapat dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat q dan r yang memenuhi persamaan

$$a = q\, b + r,\ 0 \quad\quad r < b.$$

Bilangan-bilangan bulat q dan r berturut-turut disebut *hasil bagi* dan *sisa* dalam pembagian a oleh b.

Definisi

Diberikan bilangan-bilangan bulat a dan b yang keduanya tidak bersama-sama nol.

Yang dimaksud *pembagi persekutuan terbesar dari a dan b*, ditulis gcd(a,b) adalah bilangan bulat positif d yang memenuhi syarat-syarat:

(i) $d \mid a$ dan $d \mid b$.

(ii) Bila $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \quad d$.

Teorema (Teorema Fundamental Aritmetika)

Setiap bilangan bulat positif p yang lebih besar dari 1 adalah bilangan prima atau hasil kali dari bilangan-bilangan prima dengan penyajian atau penulisan yang tunggal, terlepas dari urutan faktor-faktornya.

Bukti dari Teorema Fundamental Aritmetika dapat dikatakan cukup sulit dan tidak diberikan di sini. Meskipun demikian buktinya juga dapat dibaca pada buku teks standar tentang teori bilangan.

FUNGSI-FUNGSI PADA TEORI BILANGAN

Di bawah ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang diperlukan. Untuk memperjelas pemahaman, diberikan contoh-contoh penerapan dari beberapa definisi tersebut.

Definisi

Untuk setiap integer positif $n, t(n)$ menyatakan banyaknya pembagi-pembagi positif dari n, sedangkan $s(n)$ menyatakan jumlah dari semua pembagi-pembagi positif dari n.

Sebagai contoh, untuk $n = 12$ pembagi-pembagi positif dari n adalah $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Jadi $t(12) = 6$ dan $s(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Teorema

Bila $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ adalah faktorisasi prima dari $n > 1$, maka pembagi positif dari n adalah bilangan-bilangan bulat d dengan bentuk

$$d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

di mana $0 \le a_i \le k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Teorema

Bila $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ adalah faktorisasi prima dari $n > 1$, maka

$$(a)\, t(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_r + 1),$$

$$(b)\ s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

Definisi

Untuk setiap bilangan real sembarang x, yang dimaksud dengan $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Dari definisi di atas jelas bahwa [5,6] = 5. [-10] = -10 dan [-5/2] = -3.

PERHITUNGAN KALENDER

Satu tahun (waktu yang diperlukan bumi untuk menyelesaikan 1 orbit mengelilingi matahari) tepatnya adalah 365,2422 hari. Dalam kalender sebelumnya (Julian), satu tahun dihitung 365, 25 hari yang kurang sesuai dengan waktu 1 orbit tersebut. Hal ini berakibat setiap 128 hari kalender Julian ketinggalan 1 hari.

Dalam kalender Gregorian, diadakan penyesuaian yang lebih akurat, dengan cara:

a. dalam tahun kabisat bulan Februari berumur 29 hari, yang lainnya 28 hari,

b. setiap abad yang tidak habis dibagi 400 ditambah 1 hari (dari setiap 128 tahun ditambah 1 hari dibulatkan menjadi setiap 400 tahun ditambah 3 hari).

Untuk kemudahan perhitungan awal tahun ditempatkan pada bulan Maret dan akhir tahun pada bulan Februari.

Untuk menyatakan hari-hari dalam satu minggu digunakan aturan:

Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
0	1	2	3	4	5	6

Di bawah ini diberikan teorema utama untuk perhitungan kalender.

Teorema (Teorema Perhitungan Kalender)

Diberikan suatu tanggal (waktu tertentu) dengan hari d, bulan m, tahun $Y = 100c + y,$ di mana $c \geq 16$ dan $0 \leq y < 100.$ Maka tanggal tersebut jatuh pada hari dengan bilangan hari mingguan yang diberikan dengan formula

$$w \equiv d + [(2,6)m - 0,2] - 2c + y + \left[\frac{c}{4}\right] + \left[\frac{y}{4}\right] (\text{mod } 7).$$

CONTOH APLIKASI

Di bawah ini diberikan dua contoh aplikasi pada perhitungan kalender. Solusi dari kedua contoh tersebut berdasarkan pada teorema di atas dengan menentukan dahulu nilai-nilai d, m, c dan y yang sesuai.

Contoh 1

Dengan menerapkan teorema di atas akan ditentukan jatuh pada hari apa tanggal 1 Maret 1990?

Dalam hal ini bulan Maret 1990 diperlakukan sebagai bulan ke-1 tahun 1990. Dengan formula pada teorema di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} w &\equiv 1+[(2,6)1-0,2]-38+90+\left[\frac{19}{4}\right]+\left[\frac{90}{4}\right] (\text{mod } 7) \\ &\equiv 1+2-38+90+4+22 \equiv 81 \equiv 4 \ (\text{mod } 7). \end{aligned}$$

Jadi tanggal 1 Maret 1990 akan jatuh pada hari Kamis.

Contoh 2

Dengan menerapkan teorema di atas akan ditentukan jatuh pada hari apa tanggal 14 Januari 2020?

Dalam hal ini bulan Januari 2020 diperlakukan sebagai bulan ke-11 dari tahun 2019.

Dengan formula pada teorema di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} w &\equiv 14+[(2,6)11-0,2]-40+19+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{19}{4}\right] (\text{mod } 7) \\ &\equiv 14+28-40+19+5+4 \equiv 2 \ (\text{mod } 7). \end{aligned}$$

Jadi tanggal 14 Januari 2020 akan jatuh pada hari Selasa.

KESIMPULAN

a. Teorema perhitungan kalender dapat digunakan untuk tanggal (waktu) mulai tahun 1600 (kalender Gregorian), karena sebelumnya aturan kalender yang digunakan berbeda (kalender Julian).

b. Penggunaan teorema perhitungan kalender di atas dapat diperluas tidak hanya menentukan pada hari apa jatuhnya suatu tanggal (waktu) yang ditentukan.
c. Bukti-bukti dari beberapa sifat dan teorema di muka dapat dilihat pada buku-buku di Daftar Pustaka, khususnya pada Daftar Pustaka nomor 1.

DAFTAR PUSTAKA

1. BURTON, DAVID, *Elementary Number Theory*, Fifth Edition, McGraw-Hill Higher Education, Boston, USA, 2002.

2. BURTON, DAVID, *The History of Mathematics: An Introduction*, Fourth Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1998.

3. NIVEN, I., H. ZUCKERMAN, and H. MONTGOMERY, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, John Wiley and Sons, New York, USA, 1991.

4. ROSEN, KENNETH, *Elementary Number Theory and Its Applications*, Third Edition, Addison Wesley, Reading, Massachussetts, 1992.

DISKUSI

FERHAT AZIZ

Apakah kesulitannya jika menggunakan data sebelum tahun 1600?

SANGADJI

Kalender Gregorian baru digunakan setelah tahun 1600. Sebelumnya digunakan kalender Julian.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

1. Nama : Sangadji
2. Tempat/Tanggal Lahir : Solo, 16 Juni 1948
3. Instansi : P2TIK-BATAN
4. Pekerjaan / Jabatan : Peneliti
5. Riwayat Pendidikan :
    - S1 Matematika FMIPA UGM
    - S2 Matematika University of Arizona, USA
    - S3 Matematika University of Montana, USA
6. Pengalaman Kerja :
    - 1974-Sekarang, BATAN
    - 1998-Sekarang, UBINUS
7. Organisasi Profesional :
    - Himpunan Matematika Indonesia

Back