

GEJALA GELOMBANG TAKLINEAR: SOLITON

M. Bunjamin *

ABSTRAK

GEJALA GELOMBANG TAKLINEAR: SOLITON. Berikut disajikan gejala alam berupa gelombang taklinear – yang disebut soliton – lewat model matematikanya, yaitu persamaan Korteweg-de Vries dan Gordon-sinus. Persamaan Burgers dan gelombang kejut sebagai kejadian khusus dari persamaan Korteweg-de Vries juga disajikan. Ditampilkan juga solusi komputasi dengan metode selisih hingga.

ABSTRACT

A NONLINEAR-WAVE PHENOMENON: SOLITONS. The natural nonlinear-wave phenomena of solitons are presented through their mathematical models known as Korteweg-de Vries and sine-Gordon equations. The Burgers equation and shock-waves as a special case of Korteweg-de Vries equation is also briefly mentioned. Computational solutions using finite difference method are also presented.

SEJARAH SINGKAT SOLITON

Di tahun 1834, J. Scott Russel (lihat Landau-Paez hal. 380) mengamati suatu gejala alam yang dia sebut gelombang menyendiri (solitary wave) di terusan / kanal Edinburg-Glasgow, lalu menulis laporan sbb.

“I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some 8 or 9 mph, preserving its original figure some 30 feet long and 1 to 1½ feet high. Its height gradually diminished, and after a chase of 1 or 2 miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of

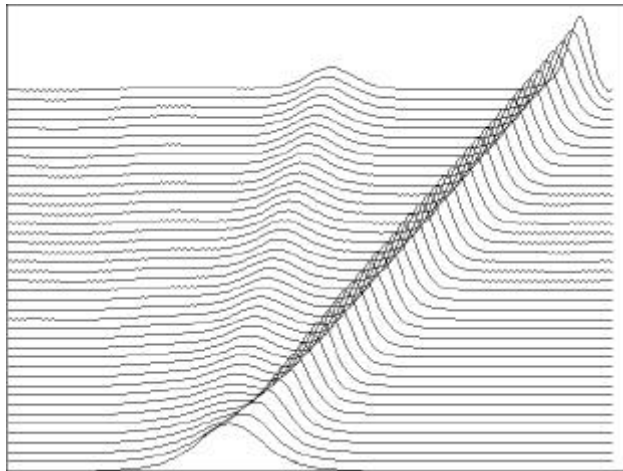
* FMIPA Univ. Indonesia & Univ. Nasional

August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon ... “.

Russel selanjutnya menirukan / mensimulasikan gelombang menyendiri ini di laboratoriumnya, dan secara empirik menentukan kecepatan gelombang c dengan mengaitkannya dengan kedalaman air h dan amplitudo A sebagai berikut:

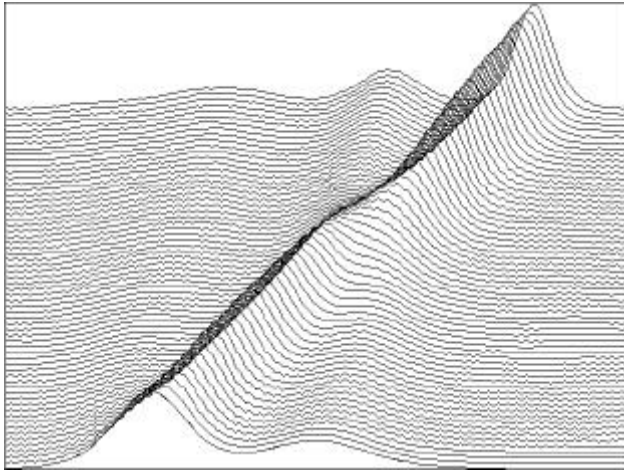
$$c^2 = g(h + A), \quad (1)$$

di mana g = percepatan gravitasi. Rumus (1) ini menunjukkan suatu ciri gelombang taklinear, yaitu makin tingginya amplitudo A berakibat makin tingginya kecepatan c . Dimohon perhatian pembaca untuk jangan mengacaukan gejala ini dengan gejala dispersi, di mana kecepatan gelombang bergantung pada panjang gelombang λ .



Gambar 1

Gejala gelombang soliton tinggi yang bergerak lebih cepat dari gelombang pendek tampak di gambar 1. Russel juga mengamati gejala bahwa sebuah gelombang soliton di terusan yang pada awalnya sendiri, dalam perjalanan berkembang menjadi 2 atau lebih gelombang yang masing-masing bergerak dengan kecepatan berbeda dan secara bertahap makin saling menjauhi satu dengan lain sehingga masing-masing menjadi soliton sendiri. Gejala ini tampak dari gambar 2 di mana sebuah gelombang langkah (step-like wave) akhirnya pecah menjadi delapan buah soliton kecil.

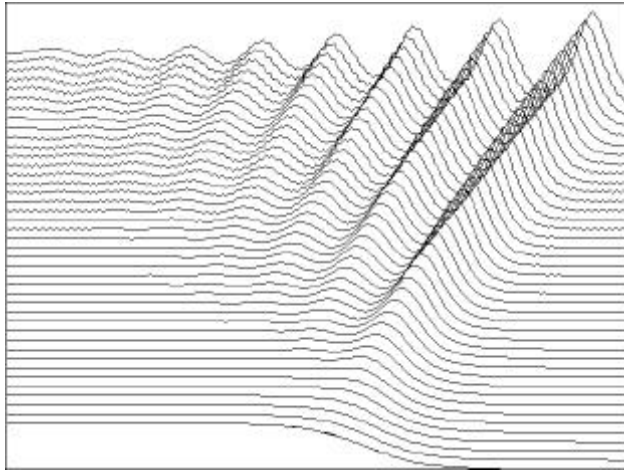


Gambar 2.

PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES

Pada tahun 1895 Korteweg & deVries menemukan persamaan gelombang soliton yang dikenal sebagai persamaan Korteweg-deVries / KdV. Korteweg & deVries mencari solusi analitik persamaan KdV dan membuktikan bahwa rumus kecepatan yang didapatkan oleh Russel ternyata benar. Model KdV “ditemukan” kembali pada tahun 1965 oleh Zabusky & Kruskal, dan merekalah yang menggunakan nama soliton pada gelombang menyendiri yang pertama kali diamati oleh Russel. Zabusky & Kruskal adalah yang pertama berhasil mencari solusi komputasi persamaan KdV, dan membuktikan bahwa

- a) syarat awal berupa sebuah gelombang langkah (step-like wave) terpecah menjadi delapan gelombang soliton (gambar 2),
- b) soliton dengan amplitudo besar bergerak lebih cepat dari soliton amplitudo kecil, dan
- c) soliton dengan amplitudo besar dapat memotong soliton pendek tanpa ada dampak apapun pada keduanya (gambar 3).



Gambar 3

Persamaan KdV adalah sebagai berikut.

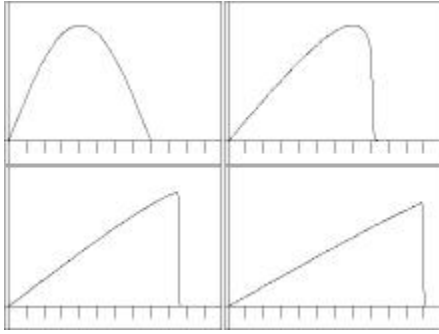
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2)$$

di mana $u = u(x, t)$ adalah simpangan gelombang yang bergantung pada posisi x dan waktu t , dan ϵ, μ konstanta. Persamaan KdV taklinear karena adanya produk $u \frac{\partial u}{\partial x}$.

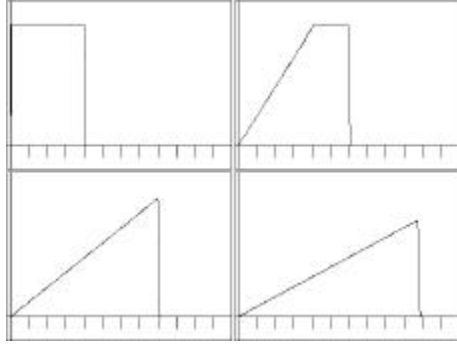
Sebelum melanjutkan pembahasan tentang persamaan KdV, ada baiknya kita singgah sebentar ke persamaan lain yang terkait dengan persamaan KdV, yaitu persamaan Burgers (Anderson dkk. dan Landau-Paez) sbb.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ (cairan encer)} \quad (3)$$

yaitu salah satu model gelombang kejut (shock waves). Dari fakta ini tampak bahwa suku taklinear dari persamaan KdV dapat menimbulkan gelombang kejut. Solusi persamaan Burgers sebagai fungsi waktu dengan menggunakan metode Lax-Wendroff (Anderson dkk.) tampak di gambar 4 dan 5, masing-masing untuk bentuk awal berupa gelombang setengah-sinus dan gelombang persegi (square wave).



Gambar 4



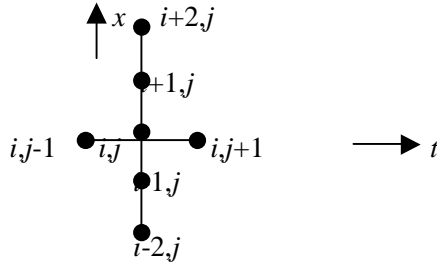
Gambar 5

Untuk mencari solusi persamaan KdV secara komputasi diterapkan rumus-rumus pendekatan derivatif dan pendekatan fungsi u sbb.: $u_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{ij} + u_{i-1,j}}{3}$, sehingga didapat rumus selisih hingga untuk pers. KdV sbb.:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} + \epsilon \frac{u_{i+1,j} + u_{ij} + u_{i-1,j}}{3} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ & + \mu \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2(\Delta x)^3} \approx 0, \\ & u_{i,j+1} \approx u_{i,j-1} - \frac{\epsilon \Delta t}{3\Delta x} (u_{i+1,j} + u_{ij} + u_{i-1,j})(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ & - \frac{\mu \Delta t}{(\Delta x)^3} (u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}). \end{aligned} \quad (4)$$

u_{ij} di sini diartikan sebagai $u_{ij} = u(i\Delta x, j\Delta t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, dan $j = 0, 1, \dots$

Sebagai syarat awal, nilai $u_{i,0}$ diketahui $\forall i$. Dari rumus ini tampak bahwa di setiap tahap j diperlukan nilai $u_{i,j-1}$ dan u_{ij} untuk menghitung $u_{i,j+1}$, seperti skema berikut.



Khusus untuk tahap pertama, modal yang kita miliki untuk menghitung $u_{i,1}$ hanyalah nilai $u_{i,0}$ yang diketahui dari syarat awal, sedangkan nilai $u_{i,-1}$, yaitu nilai u di saat “sejarah masa lalu” tidak diketahui. Karena itu khusus untuk tahap awal ini kita gunakan rumus selisih maju untuk $\partial u / \partial t$, sehingga persamaan KdV di tahap awal adalah:

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\Delta t} + \varepsilon \frac{u_{i+1,0} + u_{i,0} + u_{i-1,0}}{3} \frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2\Delta x} + \mu \frac{u_{i+2,0} - 2u_{i+1,0} + 2u_{i-1,0} - u_{i-2,0}}{2(\Delta x)^3} \approx 0,$$

$$u_{i,1} \approx u_{i,0} - \frac{\varepsilon \Delta t}{6\Delta x} (u_{i+1,0} + u_{i,0} + u_{i-1,0})(u_{i+1,0} - u_{i-1,0}) - \frac{\mu \Delta t}{2(\Delta x)^3} (u_{i+2,0} - 2u_{i+1,0} + 2u_{i-1,0} - u_{i-2,0}). \quad (5)$$

Sebagai fungsi awal pada saat $t = 0$, dipilih fungsi

$$u(x,0) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(0.2x - 5)] \quad (6)$$

(Landau-Paez), dengan $u(0, 0) = 1$, yaitu di posisi $x = 0$, dan $u(50, 0) = 0$ di posisi $x = 50$.

Jika index i misalnya dipilih $0 \leq i \leq N$, N bulat, maka nilai $u_{i,0}$ untuk $0 \leq i \leq N$ diketahui dari syarat awal, dan tugas kita adalah menghitung nilai u_{ij} untuk $0 \leq i \leq N$, $j = 1, 2, \dots$.

Khusus untuk daerah $2 \leq i \leq N - 2$, rumus di atas tidak menimbulkan masalah, namun masalah timbul ketika $i = 0$ atau 1 karena ruas kanan rumus di atas

mengandung $u_{i-1,j}$ dan $u_{i-2,j}$, padahal nilai $u_{-1,j}$ dan $u_{-2,j}$ tidak diketahui. Masalah sama juga timbul untuk $i = N - 1$ atau N , karena nilai $u_{N+1,j}$ dan $u_{N+2,j}$ tidak diketahui. Cara mudah untuk mengatasi hal ini ialah dengan mengambil nilai $u_{0,1} = 1$ dan $u_{N,1} = 0 \quad \forall j$, yaitu sesuai dengan nilai di ujung kiri dan kanan dari fungsi awal (6). Untuk menentukan nilai $u_{1,1}$ dan $u_{N-1,1}$, dipilih $u_{1,1} = u_{0,1}$ dan $u_{N-1,1} = u_{N,1}$, sehingga berlaku

$$u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j} \rightarrow u_{i-1,j} - u_{i+1,j}, j = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Jadi kesimpulannya, untuk $j > 0$ dan $2 \leq i \leq N - 2$ digunakan rumus umum (4), sedangkan rumus (7) digunakan hanya untuk $i = 1$ dan $i = N - 1, j > 0$. Rumus (5) digunakan sekali saja, yaitu untuk $j = 1$.

DUA SOLITON YANG SALING BERPOTONGAN

Jika sebagai fungsi awal digunakan fungsi superposisi dua soliton, yang lebih tinggi berada di sebelah kiri dan yang lebih pendek di sebelah kanan, dan keduanya bergerak ke kanan, sebagai berikut:

$$u(x,0) = 0.8 \left[1 - \tanh^2(0.25x - 3) \right] + 0.3 \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{4.5x}{26} - 4.5 \right) \right], \quad (8)$$

akan tampak dinamika taklinear yang unik, yaitu soliton tinggi yang semula di kiri bergerak ke kanan lebih cepat sehingga memotong soliton pendek (lihat gambar 3).

PERSAMAAN KDV ORDE-5

Perlu dikaetahui bahwa selain persamaan KdV orde-3, dalam berbagai aplikasi juga digunakan persamaan KdV orde-5 sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0. \quad (9)$$

Untuk informasi lebih lanjut dapat dibaca tulisan Boyd 1995.

PERSAMAAN GORDON-SINUS (SINE-GORDON EQUATION).

Persamaan Gordon-sinus 1-D adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u, \quad (10)$$

dan untuk 2-D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u. \quad (11)$$

Untuk mencari solusi persamaan (10), digunakan rumus selisih hingga sbb.:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{(\Delta t)^2} = \sin[(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})/2]$$

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2 \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] u_{ij} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}$$

$$= (\Delta t)^2 \sin[(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})/2]$$

$$u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + 2 \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] u_{ij} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

$$- (\Delta t)^2 \sin[(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})/2]. \quad (12)$$

Untuk persamaan (11), persamaan selisih hingganya adalah:

$$\frac{u_{i-1,j,k} - 2u_{ijk} + u_{i+1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{ijk} + u_{i,j+1,k}}{(\Delta y)^2} - \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{ijk} + u_{i,j,k+1}}{(\Delta t)^2}$$

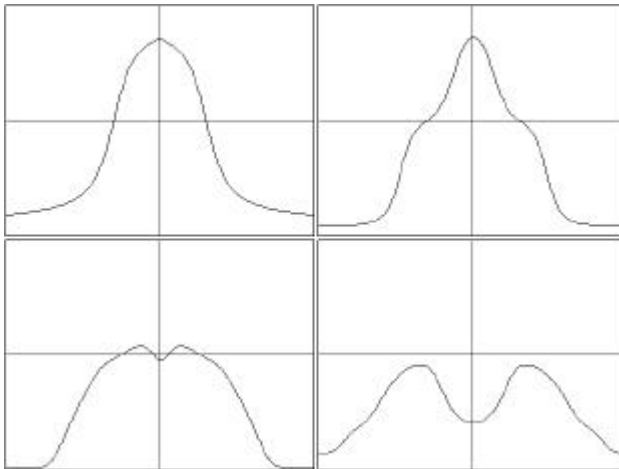
$$= \sin[(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k})/4],$$

$$\begin{aligned}
u_{i,j,k+1} = & -u_{i,j,k-1} + 2 \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] u_{ijk} \\
& + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) \\
& - (\Delta t)^2 \sin \left[(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) / 4 \right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Di gambar 6 ditampilkan solusi persamaan 10 lewat rumus selisih hingga 12, sedangkan solusi persamaan 11 tidak dapat ditampilkan karena keterbatasan sarana komputer yang dimiliki penulis.

Syarat awal contoh ini ialah:

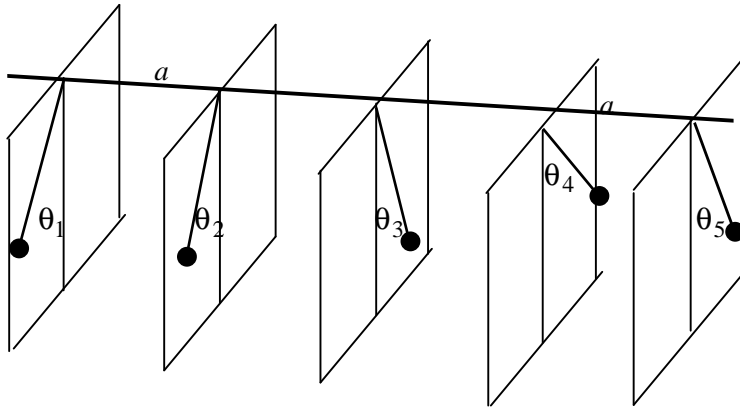
$$u(x, t = 0) = 4 \tan^{-1}(3 - |x|) \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0.$$



Gambar 6

PENJABARAN PERSAMAAN GORDON-SINUS

Sekedar sebagai tambahan informasi, persamaan Gordon-sinus dapat diperoleh dari gejala mekanika sebagai berikut.



Gambar 7

Perhatikan sederetan bandul matematik 1-D yang identik (lihat gambar 7) dengan jarak satu dengan lain = a , dan mereka saling dihubungkan oleh sebuah batang torsi (torsion bar). Untuk setiap bandul, θ adalah sudut simpangan bandul terhadap posisi seimbang. Di samping gaya gravitasi yang selalu ingin mengembalikan bandul ke posisi seimbangnya, torsi yang timbul karena batang torsi yang sedikit terpuntir menyebabkan ayunan satu bandul mempengaruhi ayunan bandul tetangganya. Hukum Newton untuk ayunan bandul yang ke- j yang melibatkan torsi τ adalah

$$\sum_{j \neq i} \tau_{ji} = I \alpha_j \rightarrow -\kappa(\theta_j - \theta_{j-1}) - \kappa(\theta_j - \theta_{j+1}) - mg \sin \theta_j = I \frac{d^2 \theta_j(t)}{dt^2}$$

$$\kappa(\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}) - mg \sin \theta_j = I \frac{d^2 \theta_j(t)}{dt^2},$$

di mana I = momen inersia, $\alpha_j = d^2 \theta_j(t) / dt^2$ = percepatan sudut bandul ke- j , dan κ adalah konstanta torsi setiap batang. Persamaan di atas adalah persamaan diferensial simultan yang banyaknya = banyaknya bandul. Jika semua bandul digerakkan bersama / serentak sehingga $\theta_i \equiv \theta_j$, maka persamaan diferensial di atas menjadi persamaan bandul tunggal yang sudah kita kenal.

Jika diandaikan bahwa banyaknya bandul dalam eksperimen di atas $\rightarrow \infty$ dan jarak mereka satu dengan lain = $a = \Delta x \rightarrow 0$, maka sistem persamaan biasa di atas menjadi satu persamaan diferensial parsial sebagai berikut.

$$\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta x} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow \theta_{j+1} \approx \theta_j + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta x,$$

$$\frac{\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}}{(\Delta x)^2} \approx \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \rightarrow \theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1} \approx \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \approx \frac{\kappa a^2}{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mg}{\kappa I} \sin \theta \rightarrow \frac{\kappa a^2}{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{mg}{\kappa I} \sin \theta.$$

Dengan pemilihan satuan secara tepat, persamaan terakhir ini adalah persamaan 10.

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas tampak beberapa sifat gelombang taklinear yang berbeda dari sifat gelombang linear (lihat Anderson dkk.), sebagai berikut.

Sebuah gelombang langkah (step-like wave) terpecah menjadi delapan gelombang soliton, b) soliton dengan amplitudo besar bergerak lebih cepat dari soliton amplitudo kecil, dan c) soliton dengan amplitudo besar dapat memotong soliton pendek tanpa ada dampak apapun pada keduanya.

Persamaan Burgers yang mirip persamaan KdV menggambarkan gelombang kejut.

DAFTAR PUSTAKA

1. ANDERSON, D.A., J.C. TANNEHILL, R.H. PLETCHER, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis / Hemisphere Publishing Corp., Bristol, Pennsylvania, USA, (1984)
2. ARGYRIS, J., G. FAUST, M. HAASE, *An Adventure in Chaos*, Comp. Meth. App. Mec. Eng., **91**, (1991).
3. BOYD, J. P., *Multiple precision pseudospectral computations of the radiation coefficient for weakly nonlocal solitary waves*, Fifth-order Korteweg-deVries equation, Comp. Phys., Vol. **9**, No. 3, May / June, (1995), p. 324.

4. GOULD, H., J. TOBOCHNIK, *An Introduction to Computer Simulation Methods*, 2-nd edn, Addison Wesley, Reading, MA, (1996).
5. LANDAU, R. H., M. J. PAEZ *Computational Physics, Problem Solving with Computers*, John Wiley, New York, (1997).